

TENTAMEN ALGEBRA OP 7 FEBRUARI 2007

U hebt drie uur de tijd om volgende problemen op te lossen. Het is toegestaan aantekeningen, boeken of opgeloste sommen te raadplegen. Geef *volledige* antwoorden. Aan antwoorden zonder motivatie of bewijs kunnen helaas geen punten toegekend worden. Schrijf op elk ingeleverd blad uw naam en studentnummer. Succes!

(Elke vraag is een half punt waard, zes correcte antwoorden levert de maximale score.)

- (1) Zij  $G$  een groep en  $a$  en  $b$  elementen van  $G$ . Toon aan dat de afbeelding

$$G \rightarrow G : g \mapsto agb$$

een bijectie is.

- (2) Zij  $p$  een priemgetal groter dan 5. Toon aan dat 30 een deler is van  $p^4 - 1$ .
- (3) Vind alle homomorfismen van  $\mathbb{Z}$  naar  $D_5$ .
- (4) Zij  $G$  de verzameling bestaande uit alle complexe getallen  $a + bi$  met  $a$  en  $b$  in  $\mathbb{Q}$  en met  $a$  en  $b$  niet beide 0. Is  $G$  een groep onder de vermenigvuldiging van complexe getallen?
- (5) Hoeveel Abelse groepen (op isomorfie na) zijn er met 9 elementen? En met 99?
- (6) Definieer een afbeelding  $f : S_5 \rightarrow A_7$  als volgt:

$$f(\sigma) = \begin{cases} \sigma & \text{als } \sigma \text{ even} \\ \sigma \circ (6\ 7) & \text{als } \sigma \text{ oneven} \end{cases}$$

Verifieer dat voor alle  $\sigma \in S_5$ , het beeld  $f(\sigma)$  even is. Toon aan dat  $f$  een injectief homomorfisme van  $S_5$  naar  $A_7$  definieert. Is er ook een injectief homomorfisme van  $S_5$  naar  $A_6$ ?

- (7) Is er een injectief homomorfisme van  $Q_8$  naar  $S_4$ ? Is er een surjectief homomorfisme van  $S_4$  naar  $Q_8$ ?